

## ニュートン力学における対称性

著者	加藤 実
号	133
発行年	1967
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10097/23262">http://hdl.handle.net/10097/23262</a>

氏名・（本籍）	かとう まこと 加藤 実
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	理 博 第 1 3 3 号
学位授与年月日	昭和 4 2 年 3 月 2 4 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 1 項該当
研究科専門課程	東北大学大学院理学研究科 （博士課程）原子核理学専攻
学位論文題目	ニュートン力学における対称性
論文審査委員	（主査） 教授 武 田 暁 教授 中 林 陸 夫 教授 佐 藤 岩 男 助教授 笹 川 辰 弥

## 論 文 目 次

- I) 緒 言
- II) 対称群と Lie Algebra
- III) スカラーによる対称性
- IV) ベクトルによる対称性
- V) テンソルによる対称性
- VI) 結 論

## 論 文 内 容 要 旨

### I) 緒 言

最近素粒子論に群論的な取扱が多く用いられるようになってきた。そこに用いられる種々な対称性は主として素粒子の分類を可能にし、これにより実際多くの素粒子が発見され、その妥当性が確かめられてきている。

相対論も量子力学もある極限にもっていくニュートン力学になるようにつくられている。そこで素粒子論における対称性も我々の世界の最も基本的な法則ともいうべきニュートン力学との関係づけが望まれるかも知れない。また量子力学と古典力学の間には型式的な同等性が存在することが知られているから、古典力学の研究の結果は、ある条件のもとでは、量子力学の結果ともなりうる。さらに古典力学の研究はこのことから推察されるように、新しい理論への有力な武器を提供する可能性もあるように思われる。そこで、古典力学においても素粒子論におけるような対称性を問題にすることは非常に興味深い。もしこのような結果が量子論に移ることができれば実際に役立つ可能性も生ずる。

量子力学の問題と関連してケプラーの問題と調和振子の問題は古くから研究され、前者は  $SO(4)$  の対称性を、後者は  $SU(3)$  の対称性を有することが知られている。上の二つの問題は両方とも回転に関する不変性を有するので、我々は回転に関して不変な系に対してさらにどんな対称性が可能であるかを一体問題で調べた。

### II) 対称群と Lie Algebra

古典力学における観測量はポワソン括弧に関して閉じた正準座標の実関数と考えられ、ポワソン括弧を Lie Product をみなすと、これらの集合は Lie Algebra を形成する。ポワソン括弧と Lie Product の関係が与えられている。Lie Algebra に対してハミルトニアン の対称性を定義し(これをみたと Lie Algebra の要素は運動の恒数とよばれている)、対称性を記述する Lie Algebra とそれに関連する対称群が論じられている。与えられたこのような Lie Algebra に対しそれに相当する群が存在するので、Lie Algebra を直接取扱い、それと関連する群を問題にする方法がとられている。

### III) スカラーによる対称性

Lie Algebra の基として角運動量の成分の他に三次元回転群に関してスカラーのように変換する量がとれる場合が議論されている。

質点の位置ベクトルを  $\vec{q}$ 、運動量ベクトルを  $\vec{p}$  で表わすと、 $\vec{p}$  と  $\vec{q}$  でつくられるスカラー量は  $r = |\vec{q}|$ 、 $l = |\vec{q} \times \vec{p}|$ 、ハミルトニアン  $H$  であり一般のスカラー量はこれらの関数と考えられる。対称性の要求からこのような関数は  $r$  によらない。このときの Lie Algebra は  $SO(3)$  の Lie

Algebra とアーベル群の Lie Algebra の直和になる。相当する群は  $SO(3)$  とアーベル群の直積と考えられる。

#### IV) ベクトルによる対称性

Lie Algebra の基として、角運動量の成分の他に角運動量ベクトルとは独立な  $SO(3)$  に関してベクトルのように変換する量がとれる場合を考察した。

Lie Algebra に対するハミルトニマンの対称性の要求から  $r$  に関する連立微分方程式が得られる。この方程式はポテンシャルが有界連続なら解をもち、積分定数を選んでとるベクトルの大きさの関数形を定めるとき、その形に応じて  $SO(4)$ 、ローレンツ群、 $SO(3)$  とアーベル群の半直積の Lie Algebra がつくられる。

#### V) テンソルによる対称性

Lie Algebra の基として、角運動量の成分の他に  $SO(3)$  に関してテンソルのように変換する量をとって考察されている。

対称性の要求から、 $r$  に関する連立微分方程式が得られる。この微分方程式も普通の物理的な場合には解をもち、一般解はいくつかの積分定数を含む形で与えられるから、 $r$  を含まない関数をかけたものも解となる。Lie Algebra の基が角運動量の成分と与えられた形のテンソル成分だけで閉じるという要求からも  $l$  に関する連立微分方程式ができる。この方程式の積分はよいにみつかることができる。この方程式は  $r$  に関する方程式の解における積分定数の制限を与えられると考えられる。角運動量成分は反対称テンソルの成分に相当するので、角運動量を含みぬテンソルをとるため、対称なテンソルを選んで議論が進められている。以上の要求をみたす実の積分定数を選んである  $H$  の関数をかけて新しいテンソルを定義すれば、これと角運動量の成分とで  $U(3)$  あるいは不変量をのぞいた  $SU(3)$  の対称性を得る。その他成分を虚数にとると  $U(3)$  になる場合や  $SO(3)$  とアーベル群の半直積になる場合も現われる。

#### VI) 結 論

以上の各節では我々は一体のハミルトニアン の対称性を記述する Lie Algebra の基として角運動量の成分の他に  $SO(3)$  に関して、スカラー、ベクトル、テンソルのように変換する量をとってどんな対称性が現われるかを考察した。スカラーの時はアーベル群と  $SO(3)$  の直積となり、特にベクトル量に関連して  $SO(4)$  が、テンソル量に関連して  $U(3)$  (又は  $SU(3)$ ) の対称性が現われることがわかった。これらの対称群はそのつくりかたからわかるとおり、 $SO(3)$  を部分群として含んでいる。

以上の議論で実関数をエルミート演算子で、ポワソン括弧を交換子でおきかえることができれば対応する量子論が得られよう。どういう場合に量子論に移れるかは非常に興味深い問題であるが、

一般に論ずることはむずかしいように思われる。その他素粒論との関係も考えられるべきであろう。

## 増 補

増補  $D$  と  $E$  ではそれぞれベクトル，テンソルについて以上の各節の一般論の例題を考察した。例えばよく知られている次の三つである。(i)自由な質点 (ii)ケプラーの問題 (iii)調和振子の問題。これらの例題では現われる微分方程式の解が簡単な形で求まる。その結果本文の例としての役をはたすとともに今まで知られている量子力学に移れる場合との関係を明らかにしている。

## 論文審査結果の要旨

最近、素粒子物理学で多くの有用な対称性が見出され、これらはLie群を用いて議論されている。この論文では、素粒子物理、量子力学における対称性のあるものは古典力学でも議論しうるものと考えて、中心力場の中で1個の質点の運動の際にあらわれる力学的対称性、即ち保存量をしらべ、これら保存量の作るLie代数の分類を行なった。

1章は序論、2章は保存量の充す条件と、保存量の作るLie代数について述べ、3章ではスカラー保存量の充す条件とそれらの作る代数、4章ではベクトル保存量の充す条件、その解の存在、それらの作る代数の持つ群が $SO(4)$ 、Lorentz群、又は $SO(3)$ とアーベル群( $T(3)$ )との直接であることを示した。5章ではテンソル、特に対称テンソルで保存する物理量の充す条件、解の存在を論じ、それらの作る代数を持つ群が $SU(3)$ 、又は $SO(3)$ とアーベル群の直積であることを示した。最後の章ではこのニュートン力学での方法を量子力学に移す問題等につき、見透し、将来性を論じている。

ニュートン力学における力学的対称性の問題は最近色々な人々によりとりあげられ、一休問題については相当よく分ってきている。この論文では保存量の条件を座標ずの大きさ、角運動量の大きさ $L$ 、エネルギー $H$ の3変動に対する微分方程式の形であらわしている。スカラー・ベクトル保存量については相当程度他の人々により研究され新しい点は少ないが、5章のテンソル量についての知見は新しいものであり、素粒子論においてよく確められている $SU(3)$ 対称性が、任意の中心力場での一個の質点の運動に対し存在し得ることが示されたのは重要と思われる。

よって加藤実提出の論文は理学博士の学位論文として合格と認める。